



TITLE:

The Fisher information metric and Poisson kernels over negatively curved Riemannian manifolds(Statistical Decision for Multiple Comparison and Its Related Topics)

AUTHOR(S):

伊藤, 光弘; 穴戸, 雄一

---

CITATION:

伊藤, 光弘 ...[et al]. The Fisher information metric and Poisson kernels over negatively curved Riemannian manifolds(Statistical Decision for Multiple Comparison and Its Related Topics). 数理解析研究所講究録 2007, 1560: 121-136

ISSUE DATE:

2007-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/81063>

RIGHT:

# The Fisher information metric and Poisson kernels over negatively curved Riemannian manifolds

筑波大学数理物質科学研究科 伊藤光弘 (Mitsuhiro Itoh)

筑波大学数理物質科学研究科 宍戸雄一 (Yuichi Shishido)

## 1. Fisher 情報計量

1.1  $(M, h)$  をコンパクトな向き付けられた  $n$ -次元  $C^\infty$  Riemann 多様体とする.  $h = \sum h_{ij} dx^i dx^j$  は Riemann 計量で, 単位体積をもつ体積要素を  $dv$  であらわすとする. すなわち  $dv$  は Riemann 体積要素の  $M$  の体積分の 1 とする:  $dv = (\text{Vol}(M))^{(-1)} \sqrt{\det(h_{ij})} dx^1 \cdots dx^n$ .

Fisher 情報行列  $(g_{ij})$  の一般化である Fisher 情報計量  $g$  を確率測度の空間  $\mathcal{P}(M)$  の上に定義する.  $M$  上の  $C^\infty$  正值確率測度  $\mu = p(x)dv(x)$  の全体を  $\mathcal{P}(M)$  であらわす:

$$\mathcal{P}(M) = \{ \mu = p(x)dv(x) \mid p \in C^\infty(M), p(x) > 0, \int_M p(x)dv(x) = 1 \} \quad (1)$$

Fisher 情報計量を定義するまえに,  $\mathcal{P}(M)$  の位相等について簡単に述べる.

測度  $\mu_o$  を一つ固定する. 任意の確率測度  $\mu$  は  $\mu = \mu_o + \tau$ ,  $\tau = q(x)dv(x)$ ,  $\int_M \tau = 0$  と書ける. すなわち  $\mathcal{P}(M) \subset \mu_o + \mathcal{Q}(M)$ , ここに

$$\mathcal{Q}(M) = \{ \tau = q(x)dv(x) \mid q \in C^\infty(M), \int_M q(x)dv(x) = 0 \} \quad (2)$$

さらに関数  $q(x)$  と  $n$ -形式  $q(x)dv(x)$  を同一視し,  $C^\infty(M)$  を  $k$ -階以下の導関数が  $L^2$ -可積分な関数からなる関数空間として完備化した空間を  $W_k^2(M)$  とする.  $\mathcal{Q}_k^2(M) = \{ \tau = q(x)dv(x) \mid q(x) \in W_k^2(M), \int_M \tau = 0 \}$  とおくと,  $\mathcal{Q}_k^2(M)$  は  $W_k^2(M)$  の閉部分ベクトル空間となる.  $\mathcal{P}_k^2(M)$  をアフィン空間  $\mu_o + \mathcal{Q}_k^2(M)$  の部分集合で密度関数がいたるところ正值となる  $n$ -形式  $p(x)dv(x)$  全体とする.  $k > n/2$  とする. Sobolev 不等式から  $\mathcal{P}_k^2(M)$  は開集合になり,  $\mathcal{Q}_k^2(M)$  をモデルとする無限次元多様体となる.

今後断りなく添数  $k$  などは省略し  $\mathcal{P}(M)$ ,  $\mathcal{Q}(M)$  と略記する.

各確率測度  $\mu = p(x)dv(x)$  は多様体  $\mathcal{P}(M)$  の点とみなされる. 曲面上の点に接線ベクトル, 接平面が考えられるように, 点  $\mu = p(x)dv(x)$  での接ベクトル, 接ベクトル空間が定まる. 実際に, 点  $\mu = p(x)dv(x)$  での接ベクトルは  $\tau = q(x)dv(x)$  であって  $\int_M \tau = \int_M q(x)dv(x) = 0$  をみたすものとしてあらわされる. 無限次元ベクトル空間  $\mathcal{Q}(M)$  が点  $\mu$  での接ベクトル空間  $T_\mu \mathcal{P}(M)$  を与える.  $\tau$  が接ベクトルである理由:  $t$  をパラメータとする  $M$  での測度の曲線:  $\mu + t\tau, |t| < \varepsilon$ , を考えると,  $\mathcal{P}(M)$  内の曲線であり,  $t=0$  での速度ベクトルが  $\tau$  であるから.

**定義 1.1 (Fisher 情報計量)**  $T_\mu \mathcal{P}(M)$  上の正定値内積  $g_\mu$  を次で定義する:

$$g_\mu(\tau_1, \tau_2) = \int_M \frac{d\tau_1}{d\mu} \frac{d\tau_2}{d\mu} \mu = \int_M \frac{q_1(x)}{p(x)} \frac{q_2(x)}{p(x)} p(x) dv(x), \quad (3)$$

ここで  $\tau_i = q_i(x)dv(x)$ ,  $i = 1, 2$  であり,

$$\frac{d\tau_i}{d\mu} = \frac{q_i(x)}{p(x)}, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

$g = \{g_\mu | \mu \in \mathcal{P}(M)\}$  を Fisher 情報計量という.

**1.2 注. a.** 多様体  $M$  は必ずしもコンパクトでなくてもよい.  $W_k^2(\mathbf{R}^n)$  を  $n$ -次元実数空間  $\mathbf{R}^n$ , 上の急減少関数のなす空間  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  を Sobolev ノルムで完備化した空間とする.  $W_k^2(\mathbf{R}^n)$  をモデルとする確率測度のなす空間  $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$  が考察可能である. [G] 参照.

**b.** Fisher 情報行列  $(g_{ij})$  の解釈: パラメータ空間  $\Xi \subset \mathbf{R}^m$  から  $\mathcal{P}(M)$  への埋め込み写像が与えられたとき, Fisher 情報行列は Fisher 情報計量の引き戻し, すなわちパラメータによる微分が与える接ベクトルの, Fisher 情報計量による内積とみなすことができる:  $\mu = p(x; \xi)dv$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$  のとき  $\tau_i = \partial p / \partial \xi_i$  より  $d\tau_i / d\mu = p^{-1} \times \partial p / \partial \xi_i = d \log p(x; \xi) / d\xi$  より  $g_{ij} = g_\mu(\tau_i, \tau_j)$ . [A-N] を参照のこと.

**1.3 例.**  $N(\mu, \sigma^2)$  を期待値  $\mu$ , 分散  $\sigma^2$  の正規分布とする.  $(\xi_1, \xi_2) = (\mu, \sigma)$  をパラメータにもつ  $\mathcal{P}(\mathbf{R})$  に属する確率測度の族である. Fisher 情報行列  $(g_{ij})$ ;  $g_{11} = 1/\sigma^2$ ,  $g_{12} = 0$ ,  $g_{22} = 2/\sigma^2$ . 計量としては  $\sum g_{ij} \xi_i \xi_j = (1/\sigma^2)(d\mu^2 + 2d\sigma^2)$  とあらわされ, パラメータ空間  $\{(\mu, \sigma) | -\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma\}$  はガウス曲率  $-2$  の双曲平面となる. この事実は 甘利俊一先生から直接伺った.

**1.4** Fisher 情報計量の幾何的性質については次の定理が基本的である.

定理 (T.Friedrich [F]).

(i) Fisher 情報計量の Levi-Civita(Riemann) 接続  $\nabla$  は次で与えられる:  
点  $\mu \in \mathcal{P}(M)$  で

$$\nabla_{\tau_1} \tau = \left( \frac{d\tau}{d\mu} \cdot \frac{d\tau_1}{d\mu} - \int_M \frac{d\tau}{d\mu} \cdot \frac{d\tau_1}{d\mu} \mu \right) \mu \quad (5)$$

$$\tau, \tau_1 \in T_\mu \mathcal{P}(M).$$

(ii)  $g$  の断面曲率は一定でその値は  $1/4$ .

(iii) 向きを保つ  $M$  の微分同相写像からなる群  $\mathcal{D}^+(M)$  が  $\mathcal{P}(M)$  に推移的に作用する ( $\psi \in \mathcal{D}^+(M)$  の作用は  $\psi: \mu \mapsto \psi^* \mu$ , すなわち  $n$ -形式  $\mu$  の  $\psi$  による引き戻し):

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{D}^+(M) / \mathcal{K},$$

$\mathcal{K}$  はある  $\mu \in \mathcal{P}(M)$  を固定する自己同相写像  $\psi \in \mathcal{D}^+(M)$  の全体のなす部分群.

(iv) 測地線に関して完備ではない.

この定理については [Sh-1] をも参照のこと.

1.5 注. 離散ケース:

$$\mathcal{P} = \{ \mu = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbf{R}^3 \mid p_i > 0, \sum_i p_i = 1 \} \quad (6)$$

とし、その上の Fisher 情報計量を求める.  $\mathcal{P}$  は  $\mathbf{R}^3$  内の平面  $x+y+z=1$  の第一象限部分をさす.  $\mathcal{P}$  は開 2-単体である. 点  $\mu = (p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{P}$  での接ベクトル空間は

$$T_\mu \mathcal{P} = \{ \tau = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R}^3 \mid \sum_i v_i = 0 \}. \quad (7)$$

$\frac{d\tau}{d\mu} = \left( \frac{v_1}{p_1}, \frac{v_2}{p_2}, \frac{v_3}{p_3} \right)$  に注意して

$$g_\mu(\tau, \tau') = \int_M \frac{d\tau}{d\mu} \frac{d\tau'}{d\mu} \mu = \frac{1}{p_1} v_1 v'_1 + \frac{1}{p_2} v_2 v'_2 + \frac{1}{p_3} v_3 v'_3$$

ここで接ベクトル  $\tau = (1, 0, -1)$ ,  $\tau' = (0, 1, -1)$  を Fisher 情報計量に代入.  $g_{11} = g_\mu(\tau, \tau)$ ,  $g_{12} = g_\mu(\tau, \tau')$ ,  $g_{22} = g_\mu(\tau', \tau')$  を求めると

$$g_{11} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3}, \quad g_{12} = g_{21} = \frac{1}{p_3}, \quad g_{22} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}$$

より, 点  $\mu$  において

$$\begin{aligned} g &= g_{11}dp_1^2 + 2g_{12}dp_1dp_2 + g_{22}dp_2^2 \\ &= \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3}\right)dp_1^2 + \frac{2}{p_3}dp_1dp_2 + \left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right)dp_2^2 \end{aligned}$$

変数変換して  $p_1 = s^2$ ,  $p_2 = t^2$  とおき, さらに  $s = r \cos \theta$ ,  $t = r \sin \theta$ ,  $0 < r < 1$ ,  $0 < \theta \leq 2\pi$  とおくと

$$g = \frac{4}{1-r^2}dr^2 + 4r^2d\theta^2$$

これはガウス曲率  $K = \frac{1}{4}$  の 2 次元球面 (半径 2) の一部分をあらわす. 平坦な 2-単体が Fisher 情報計量的には一様に曲がって見えることになる. ガウス曲率は Riemann 多様体の断面曲率なので, このことは  $\mathcal{P}(M)$  上の Fisher 情報計量の断面曲率の値が一定値  $\frac{1}{4}$  であることと符合する.

1.6  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(M)$  上の Fisher 情報計量に関して双対接続が定義できる. 3 階共変対称テンソル  $T$  を

$$T: T_\mu \mathcal{P} \times T_\mu \mathcal{P} \times T_\mu \mathcal{P} \longrightarrow \mathbf{R}; \quad T(\tau^1, \tau^2, \tau^3) = \int_M \left( \frac{d\tau^1}{d\mu} \frac{d\tau^2}{d\mu} \frac{d\tau^3}{d\mu} \right) \mu \quad (8)$$

と定めると, 任意実数  $t$  について接続

$$\nabla^t = \nabla - tT, \quad \nabla^{-t} = \nabla + tT \quad (9)$$

は捩れなしの互いに双対な接続である. [Shi] 参照.

## 2. 負曲率多様体と Poisson 核

2.1  $(X, h)$  を単連結, 完備  $n$ -次元 Riemann 多様体で, 次の負曲率条件をみたすものとする:

$$-b^2 \leq K_Y \leq -a^2 < 0 \quad (10)$$

ここに  $a, b$  は正定数.  $K_Y$  は任意の断面  $Y$  についての断面曲率である. Cartan-Hadamard の定理より, 負曲率条件から  $(X, h)$  は  $n$ -次元ユークリッド空間と微分同相である.

## 2.2 例. $n$ -実双曲空間 $(D^n, h_o)$ : 単位円板 Poincaré モデル

$$D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| < 1\}, \quad h_o = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \sum_{i=1}^n dx_i^2 \quad (11)$$

上半空間モデルもある.  $n$ -実双曲空間は定曲率空間なので  $K_Y = -1$ .

曲率条件 2.1 は Poisson 核が定義されるための必要条件である.

$X$  上の測地線は, 以下すべて単位スピードかつ向きを持った測地線とする. このような測地線を正規な測地線とよぶ. 測地線の負曲率多様体上での基本的性質等については, [E], [S] 参照のこと.

**2.3 定義 (測地線の漸近同値).** 向きをもった単位速度, 半開測地線  $c_1 = c_1(t)$ ,  $c_2 = c_2(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$  が漸近同値とは, 距離  $d(c_1(t), c_2(t))$  が  $t$  について上に有界であるときをいう. このとき  $c_1 \sim c_2$  とかく.

$\mathcal{G}(X)$  で向きをもった単位スピード, 半開測地線全体の集合とし, 同値関係  $\sim$  で類別した商空間  $\mathcal{G}(X)/\sim$  を理想境界, または無限遠境界といい,  $\partial X$  とあらわす.

基点  $x_o \in X$  を固定する.  $\partial X$  は  $x_o$  での接ベクトル空間の単位接球面  $U_{x_o}X = \{v \in T_{x_o}X \mid |v| = 1\}$  と同一視できる. 理由は任意の元  $\theta = [c] \in \partial X$  に対し一意的に基点を出発する半開測地線  $\gamma$  で  $\theta = [\gamma]$  となるものが存在する. よって  $\partial X$  はつねに基点に関する単位接球面と同一視される. 結果として,  $\partial X$  は  $n-1$  次元球面  $S^{n-1}$  とみなされる. さらに  $X \cup \partial X$  に錐位相をいれることにより  $X$  のコンパクト化を与える. 位相の入れ方については [E], [S] を参照.

**2.4  $n$ -次元実双曲空間  $(D^n, h_o)$  の理想境界:** この場合理想境界 (原点  $o$  を基点とする) はまさに  $o$  中心, 半径 1 の球面  $\partial D^n = S^{n-1}$  である.

**2.5 古典的 Dirichlet 問題との類推として無限遠 Dirichlet 問題が考えられる** ([P] を参照).  $(X, h)$  の Laplacian  $\Delta = -\sum_i h^{ij} \nabla_i \nabla_j$  について  $\Delta u = 0$  をみたす関数  $u: X \rightarrow \mathbf{R}$  を調和関数という. 理想境界  $\partial X$  上で与えられた関数と一致し  $X$  において調和な関数を求める問題を (無限遠) Dirichlet 問題という.

**定理 (Anderson, Sullivan).**  $(X, h)$  は 2.1 の条件をみたすものとする. 任意の  $\psi \in C^0(\partial X)$  にたいし,

$$\Delta u = 0 \text{ in } X, \quad u|_{\partial X} = \psi \quad (12)$$

をみたす関数  $u \in C^\infty(X) \cap C^0(X \cup \partial X)$  がただ一つ存在する. [Sch-Y] を参照のこと.

同一視  $\partial X = U_{x_0} X = S^{n-1}$  のもとに  $\partial X$  上の単位体積標準測度を  $d\theta$  であらわす:

$$d\theta = \frac{1}{\text{Vol}(S^{n-1})} d\theta^1 \wedge \cdots \wedge d\theta^{n-1} \quad (13)$$

ここに  $\{d\theta^i\}$  は  $U_{x_0} X = S^{n-1}$  の, 向きに同調した局所正規直交基  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  の双対基.

Dirichlet 問題の解  $u$  は, 2.1 の条件をみたす  $(X, h)$  にたいして, Poisson 核による積分表示をもつことが知られている ([Sch-Y]).

**2.6 定義 (Poisson 核).** 各  $\theta \in \partial X$  について定まった関数  $\Phi(x, \theta) \in C^0(X \cup \partial X \setminus \{\theta\})$  は,  $x \in X$  について調和関数であり, さらに次をみたすとき基点において正規化された Poisson 核という:

1.  $\Phi(x, \theta) > 0$  for any  $x \in X$ ,
2.  $\Phi(x_0, \theta) = 1$ ,
3.  $\lim_{x \rightarrow \theta} \Phi(x, \theta) = \infty$ ,
4.  $\theta' \in \partial X, \theta' \neq \theta \implies \lim_{x \rightarrow \theta'} \Phi(x, \theta) = 0$ .

解  $u = u(x)$  は Poisson 積分表示をもつ:

$$u(x) = \int_{\partial X} \Phi(x, \theta) \psi(\theta) d\theta \quad (14)$$

**2.7 例.** 実双曲空間  $(D^n, h_o)$  の中心  $o$  を基点とする正規化された Poisson 核は

$$\Phi(x, \theta) = \left( \frac{1 - |x|^2}{|x - \theta|^2} \right)^{n-1}, \quad x \in D^n, \theta \in \partial D^n \quad (15)$$

ここに  $|\cdot|$  は  $D^n \subset \mathbf{R}^n$  の標準ノルム.

**定理 (Schoen-Yau [Sch-Y]).** 曲率条件 2.1 をみたす  $(X, h)$  に対して Poisson 核の存在と一意性がいえる.

**命題 2.1 ([I-Sh], [Sh-2]).** Poisson 核  $\Phi(x, \theta)$  は, 固定点  $x \in X$  にたいして理想境界  $\partial X$  上の確率密度関数を与える: すなわち  $\mu = \Phi(x, \theta) d\theta$  は  $\mathcal{P}(\partial X)$  の元である.

証明.  $\partial X$  上恒等的に 1 に等しい関数  $\psi$  についての Dirichlet 問題の解  $u$  は明らかに恒等的に 1 に等しい関数である. よって Poisson 積分表示から

$$1 = \int_{\partial X} \Phi(x, \theta) d\theta(\theta), \quad (16)$$

すなわち  $\Phi(x, \theta) d\theta(\theta)$  は  $\mathcal{P}(\partial X)$  の元である.

**2.8 定義.** Poisson 核写像  $\varphi: X \rightarrow \mathcal{P}(\partial X)$  を  $\varphi: x \mapsto \Phi(x, \theta) d\theta$  で定義する.

**2.9 注.** 重心写像  $b: \mathcal{P}(S^1) \rightarrow D^2$  について議論するため Douady & Earle は写像  $\varphi$  を実双曲平面に対して定義した ([D-Ea]). Besson, Courtois & Gallot は  $X$  から  $L^2(\partial X, d\theta)$  への, Poisson 核写像  $\varphi$  と類似の写像を定義し,  $(X, h)$  の対称空間としての特徴づけを行っている ([B-C-G]).

### 3. Fisher 情報計量と Poisson 核写像

**3.1**  $\varphi: X \rightarrow \mathcal{P}(\partial X)$  は  $X$  の点  $x$  をパラメータとする  $\partial X$  上の確率測度の族を与える. Fisher 情報計量  $g$  のこの写像  $\varphi$  による引き戻し  $\varphi^*g$  を考察する. そのために写像の微分写像:  $d\varphi: T_x X \rightarrow T_\mu \mathcal{P}(\partial X)$ ,  $\mu = \varphi(x)$  と, 以下に述べる幾何学的に定義された Busemann 関数を調べる必要がある.

**3.2 定義 (Busemann 関数).**  $(X, h)$  は曲率条件 2.1 をみたす非コンパクト完備 Riemann 多様体とする.  $\theta \in \partial X$  に対し  $X$  上の関数  $x \mapsto B(x, \theta)$  を

$$B(x, \theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} (d(c(t), x) - t), \quad (17)$$

で定義する.  $B(x, \theta)$  を, 基点  $x_0$  についての Busemann 関数という. ここに  $c(t)$  は基点  $x_0$  を出発し,  $\theta$  に到達する正規測地線;  $c(0) = x_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \theta$  Busemann 関数  $B(x, \theta)$  のみたす性質:

1.  $B(x_0, \theta) = 0$ ,
2.  $\lim_{x \rightarrow \theta} B(x, \theta) = -\infty$ ,
3.  $\lim_{x \rightarrow \theta'} B(x, \theta) = +\infty$ ,  $\theta' \neq \theta$

Busemann 関数  $B(x, \theta)$  は変数  $x \in X$  について  $C^2$ -級である ([S]). 負曲率完備多様体上の Busemann 関数の基本的性質については [E], [S] を参照のこと.



**3.3** さて単連結, 負曲率完備 Riemann 多様体  $(X, h)$  が階数 1 の非コンパクト型対称空間であると仮定する. すると次の定理が成り立つ.

**定理 3.1** ([I-Sh],[Sh-2]). 階数 1,  $n$ -次元非コンパクト型対称空間  $(X, h)$  に対して, Poisson 核写像  $\varphi$  は埋め込みであり,  $\varphi$  による Fisher 情報計量  $g$  の引き戻し  $\varphi^*g$  は次をみたす:

$$\varphi^*g = \frac{\rho^2}{n} h \quad (18)$$

いいかえると

$$g_{\varphi(x)}(d\varphi(u), d\varphi(v)) = \frac{\rho^2}{n} h_x(u, v), \quad u, v \in T_x X, x \in X \quad (19)$$

ここに  $\rho = \rho_{(X, h)}$  は  $(X, h)$  の体積エントロピーと呼ばれる量で,  $(X, h)$  内の測地球  $B(x; r)$  の体積の指数増大度を表す:

$$\rho(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log \text{Vol}(B(x; r)), \quad x \in X, \quad (20)$$

対称空間の場合, 空間が等質的なので  $\rho$  は  $x$  に依存しない量となる.

**3.4** この定理の主張は,  $(X, h)$  の接ベクトルの内積を Poisson 核写像を通して Fisher 情報計量  $g$  で測っても本来の計量  $h$  で測っても定数倍の違いしかないということである. しかも定数は体積エントロピーなる幾何学量で与えられる.

証明は以下に示すように対称空間の等長変換群に関する推移性, Poisson 核と Busemann 関数の関係式, および等長変換が理想境界  $\partial X$  上ひきおこす変換の Jacobian の Poisson 核表示式を用いる.

**3.5** 対称空間の定義は [p.170, H] を参照のこと. 幾何学的典型的空間である  $n$ -次元球面,  $n$ -次元ユークリッド空間,  $n$ -次元実双曲空間を包摂する完備 Riemann 多様体  $(X, h)$  で, 各点  $x$  にたいして等長変換  $s_x \in I(X, h)$  で次を満たすようなものが存在するとき  $(X, h)$  を対称空間という:

$$s_x \circ s_x = \text{id}_X \quad (X \text{ の恒等変換}) \quad \text{かつ } x \text{ は } s_x \text{ の孤立した固定点である.}$$

ここに  $I(X, h)$  は等長変換 (計量を保つ微分同相変換) の全体, 等長変換群を表す. 実際には  $s_x$  は点  $x$  を通る測地線を逆向きにする変換, すなわち測地対称で与えられる ([p.170, H]). 実数が正, 零, 負数に分かれるように, 対称空間もコンパクト型, ユークリッド型, 非コンパクト型に分類される. このうち負曲率で曲率条件 2.1 をみたすのは非コンパクト型のもので階数 1 のものに限られることが知られている. 階数 1 の非コ

コンパクト型対称空間は4種類ある：実双曲空間  $H_{\mathbf{R}}^n$ ，複素双曲空間  $H_{\mathbf{C}}^n$ ，4元数双曲空間  $H_{\mathbf{H}}^n$ ，8元数双曲空間  $H_{\mathbf{O}}^n$ 。

次元は  $\dim H_{\mathbf{F}}^n = n \cdot \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{F}$ ， $\mathbf{F}$  は各双曲空間に対応する体。

体積エントロピーは  $\rho = n + \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{F} - 2$ 。[B-C-G] を参照のこと。

**3.6 階数1の非コンパクト型対称空間の Poisson 核  $\Phi(x, \theta)$  は次であらわされる ([B-C-G])：**

$$\Phi(x, \theta) = \exp(-\rho B(x, \theta)) \quad (21)$$

この事実より，まず Poisson 核写像  $\varphi$  は単射。なぜならば， $\varphi(x) = \varphi(y)$ ， $x \neq y$  と仮定する。2点  $x, y$  を結ぶ正規測地線  $c = c(t), t \geq 0, c(0) = x$ ，の定める理想境界  $\partial X$  上の点を  $\theta$  とし，正規化した Busemann 関数  $B(\cdot, \theta)$  を考えると， $B(z, \theta) = B_c(z, \theta) + d(x, x_0)$ ， $z \in X$ ，とあらわされる ([E], [S] を参照)。ここに  $B_c(z, \theta)$  は測地線  $c$  に関する Busemann 関数である。したがって2点  $x, y$  での  $B(\cdot, \theta)$  の値は異なり，上の Poisson 核表示から Poisson 核の値も異なる。これは矛盾。よって  $\varphi$  は単射。

**3.7 対称空間  $(X, h)$  のもつ著しい性質として，等長変換群  $I(X, h)$  が  $(X, h)$  に推移的に作用する：**  $x_0$  を基点 (原点) としたとき，任意の点  $x$  に対して  $x_0$  を  $x$  に写す等長変換  $\gamma \in I(X, h)$  があること。

**3.8 一般的設定に戻って， $(X, h)$  を曲率条件 2.1 をみたす単連結完備 Riemann 多様体とする。** このとき次がいえる。

等長変換  $\gamma \in I(X, h)$  は測地線  $c = c(t)$  を測地線  $\gamma \circ c = \gamma(c(t))$  に移し，なおかつ距離をたもつ； $d(\gamma(x), \gamma(y)) = d(x, y)$ ，ので漸近的同値な2測地線  $c, c'$  は漸近的同値2測地線  $\gamma \circ c, \gamma \circ c'$  に移される。すなわち  $\partial X$  の変換 (同じ記号  $\gamma$  であらわす) が定まる：

$$\gamma : \partial X \longrightarrow \partial X; \theta = [c] \mapsto \gamma(\theta) = [\gamma \circ c]. \quad (22)$$

**3.9 重要な事実と記号の約束：** 変換  $\gamma : \partial X \longrightarrow \partial X$  は  $\partial X$  上の  $(n-1)$ -形式を  $(n-1)$ -形式に引き戻す操作  $\gamma^*$  により  $\mathcal{P}(\partial X) \subset \Omega^{n-1}(\partial X)$  の変換を引き起こす。 $\Omega^{n-1}(\partial X)$  は  $\partial X = S^{n-1}$  上の  $(n-1)$ -形式のなすベクトル空間である。ここで写像  $\gamma : \Omega^{n-1}(\partial X) \longrightarrow \Omega^{n-1}(\partial X)$  を

$$\gamma(\mu) := (\gamma^{-1})^*(\mu) \quad (23)$$

で定義する。すると次に示すように左作用がえられる：

$$(\gamma \circ \gamma_1)(\mu) := \gamma(\gamma_1(\mu)), \quad \gamma, \gamma_1 \in I(X, h) \quad (24)$$

**定理 (M.Bourdon([B])).** 等長変換  $\gamma \in I(X, h)$  が引き起こす理想境界  $\partial X$  の変換  $\gamma$  は次の Jacobian 表示式をもつ:

$$\gamma^*(d\theta(\theta')) = \Phi(\gamma^{-1}(x_o), \theta) d\theta(\theta); \quad \theta' = \gamma(\theta)$$

ここに  $x_o$  は正規化された Poisson 核の基点. すなわち右辺の Poisson 核関数は左辺の正規化標準体積要素  $d\theta$  の  $\gamma$  による引き戻し (Jacobian に相当) の密度をあたえる. たとえば  $\gamma$  が基点を固定する変換 ( $\gamma(x_o) = x_o$ ) とすると  $\gamma^*(d\theta(\theta')) = \Phi(x_o, \theta) d\theta(\theta) = d\theta(\theta)$  となる. このことは,  $\gamma$  が  $x_o$  での接ベクトル空間の等長的線形変換であるという事実, 同一視  $\partial X = U_{x_o} X$  および  $d\theta$  が単位接球面  $U_{x_o} X$  上の標準体積要素であるという事実より,  $d\theta$  が  $\gamma$  で不変となることと符合する.

Bourdon の公式から正規化された Poisson 核について変換公式がえられる ([B-C-G]):

$$\Phi(\gamma(x), \theta) = \Phi(x, \gamma^{-1}(\theta)) \Phi(\gamma(x_o), \theta) \quad (25)$$

**命題 3.2 ([I-Sh],[Sh-2]).** Poisson 核写像  $\varphi: X \rightarrow \mathcal{P}(\partial X)$  は  $X$  の等長変換  $\gamma$  と可換である:

$$\varphi(\gamma(x)) = \gamma(\varphi(x)), \quad x \in X \quad (26)$$

すなわち

$$\Phi(\gamma(x), \theta) d\theta = \gamma(\Phi(x, \theta) d\theta), \quad x \in X. \quad (27)$$

**命題 3.3 ([I-Sh],[Sh-2]).** 等長変換  $\gamma \in I(X, h)$  が引き起こす理想境界上の確率測度の空間  $\mathcal{P}(\partial X)$  の変換は情報計量  $g$  に関して等長変換となる:

$$g_{\gamma(\mu)}(d\gamma(\tau_1), d\gamma(\tau_2)) = g_{\mu}(\tau_1, \tau_2), \quad \tau_i \in T_{\mu} \mathcal{P}(\partial X), \quad i = 1, 2, \quad \mu \in \mathcal{P}(\partial X)$$

**3.9 命題の証明.**  $\mu = m(\theta) d\theta$  とおく. さらに  $\tau_i = f_i(\theta) \mu \in T_{\mu} \mathcal{P}(\partial X)$ ,  $i = 1, 2$  とおく.  $\partial X$  の変換としてみた  $\gamma \in I(X, h)$  の微分写像  $d\gamma: T_{\mu} \mathcal{P}(\partial X) \rightarrow T_{\mu} \mathcal{P}(\partial X)$  は写像  $\gamma^{-1}: \partial X \rightarrow \partial X$  による  $\partial X$  上の  $(n-1)$ -形式の引き戻しに他ならない:  $d\gamma(\tau_i) = (\gamma^{-1})^*(\tau_i)$ . 計算すると,  $\gamma(\mu) = m(\gamma^{-1}(\theta)) \gamma(d\theta) = m(\gamma^{-1}(\theta)) \Phi(\gamma(x_o), \theta) d\theta$ ,  $\tau_i = f_i(\theta) \mu$  より

$$d\gamma(\tau_i) = \gamma(\tau_i) = f_i(\gamma^{-1}(\theta)) \gamma(\mu)$$

よって

$$\frac{d\gamma(\tau_i)}{d\gamma(\mu)} = f_i(\gamma^{-1}(\theta)) \cdot$$

したがって

$$\begin{aligned} g_{\gamma(\mu)}(d\gamma(\tau_1), d\gamma(\tau_2)) &= \int_{\partial X} \frac{d\gamma(\tau_1)}{d\gamma(\mu)} \cdot \frac{d\gamma(\tau_2)}{d\gamma(\mu)} \gamma(\mu) \\ &= \int f_1(\gamma^{-1}(\theta)) f_2(\gamma^{-1}(\theta)) m(\gamma^{-1}(\theta)) \Phi(\gamma(x_o), \theta) d\theta \end{aligned}$$

ここで

$$(\gamma^{-1})^*(d\theta) = \Phi(\gamma(x_o), \theta) d\theta$$

より  $\theta' = (\gamma^{-1})^*(\theta)$  と変数変換すると, 積分は

$$\int_{\theta' \in \partial X} f_1(\theta') f_2(\theta') m(\theta') d\theta'$$

これは Fisher 情報計量の定義より  $g_{\mu}(\tau_1, \tau_2)$  に等しい. よって命題は示された.

**3.10 定理の証明.** 等長変換群の推移性により原点  $x_o$  で Poisson 核写像  $\varphi$  の微分写像  $d\varphi : T_{x_o}X \rightarrow T_{\mu}\mathcal{P}(\partial X)$ ,  $\mu = \varphi(x_o)$  が所与の等式をみたすことを示せばよい.  $\varphi(x) = \Phi(x, \theta) d\theta = \exp(-\rho B(x, \theta)) d\theta$  および  $B(x_o, \theta) = 0$  より  $u \in T_{x_o}X$  を任意単位接ベクトルとすれば

$$\begin{aligned} d\varphi(u) &= -\rho dB(\cdot, \theta)(u) \exp(-\rho B(x_o, \theta)) d\theta \\ &= -\rho dB(\cdot, \theta)(u) d\theta, \quad u \in T_{x_o}X \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \varphi^*g(u, u) &= \rho^2 \int_{\partial X} (dB(\cdot, \theta)(u))^2 d\theta \\ &= \rho^2 \int (h(u, c'(0))(dB(\cdot, \theta)(c'(0))))^2 d\theta \end{aligned} \quad (29)$$

である. 第2の等号は  $x_o$  で正規化された Busemann 関数の性質  $dB(\cdot, \theta)(c'(0)) = -1$  を用いた. ここで  $c(t)$  は始点  $x_o$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \theta$  なる正規測地線である.

$$\varphi^*g(u, u) = \rho^2 \int (h(u, c'(0)))^2 d\theta \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
&= \rho^2 \int_w h(u, w)^2 dw \\
&= \rho^2 \int_{w \in \partial X = S^{n-1}} h(u, w)^2 dw \\
&= \rho^2 \int_{w \in \partial X = S^{n-1}} \xi_1^2 dw
\end{aligned}$$

ここで  $\xi_1$  は  $w$  の,  $T_{x_0}X$  の正規直交基底  $\{e_1 = u, e_2, \dots, e_n\}$  に関する成分である. 球面積分公式  $\int_{S^{n-1}} \xi_1^2 dw = \frac{1}{n}$  より右辺は

$$\frac{\rho^2}{n} = \frac{\rho^2}{n} h(u, u).$$

証明おわり.

**3.11 注.** 定理より Poisson 核写像ははめ込みとなり, 3.6 で示した単射性からさらに埋め込みでもある.

**定理 3.12 (I-Sh), [Sh-2]).**  $(X, h)$  を階数 1 の非コンパクト型対称空間とする. すると Poisson 核写像は極小埋め込み写像である.

**3.11 定理の証明.** Poisson 核写像の同変性により, 基点  $x_0$  にて極小性を示せばよい.  $T_{x_0}X$  の正規直交基底を  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  とする.  $d\varphi(u) = -\rho dB(\cdot, \theta)(u)d\theta$  なので, 基点  $x_0$  では  $d\varphi(e_i) = -\rho\theta_i d\theta$ . ここに  $\theta_i$  は同一視  $\partial X = U_{x_0}X$  のもとでの  $\theta$  の  $e_i$ -成分. Fisher 情報計量の Levi-Civita 接続の公式より

$$\nabla_{d\varphi(e_i)} d\varphi(e_j) = \frac{1}{2} \left( \rho^2 \theta_i \theta_j - \rho^2 \int_{S^{n-1}} \theta_i \theta_j d\theta \right) d\theta. \quad (31)$$

$\sum \theta_i^2 = 1$  より

$$\sum_{i=1}^n \nabla_{d\varphi(e_i)} d\varphi(e_i) = 0. \quad (32)$$

よって Poisson 核写像は極小である.

## 4. Poisson 核の幾何学

**4.1** 解析的に定義される Poisson 核と測地線的幾何学的に定義される Busemann 関数の関係は相性がよい. 特に階数 1 の非コンパクト型対称空間群では顕著である. 実際

$$\Phi(x, \theta) = \exp(-cB(x, \theta)) \quad (33)$$

なる関係式 ( $c$  は定数) をもつ. そこで, この関係式をみたす単連結完備負曲率多様体は階数 1 の対称空間かという逆問題を考えよう. この特徴付け問題について次の定理がえられる.

**定理 4.2** ([I-Sh],[Sh-2]).  $(X, h)$  を単連結完備  $n$ -次元負曲率 Riemann 多様体で曲率条件 2.1 をみたすものとする.  $n \geq 3$  かつ  $(X, h)$  はコンパクト商をもつ (すなわち  $I(X, h)$  の部分群  $\Gamma$  が存在して商空間  $X/\Gamma$  はコンパクト  $C^\infty$ -多様体となる) と仮定する. もし Poisson 核が

$$\Phi(x, \theta) = \exp(-cB(x, \theta)), \quad (34)$$

( $c$  は定数) で与えられるならば,  $(X, h)$  は階数 1 の非コンパクト型対称空間である. さらに  $c$  は体積エントロピー  $\rho$  に一致する.

証明には次の定理を用いる.

**定理 ([B-C-G]).**  $(X, h)$  を, 連結コンパクト  $n$ -次元負曲率 Riemann 多様体とする.  $X$  の普遍被覆空間  $\tilde{X}$  が漸近的調和 (すなわち任意のホロ球面の平均曲率が一定である) ならば,  $\tilde{X}$  は階数 1 の対称空間である.

**定理 4.2 の証明.** 点  $x$  での接ベクトル空間  $T_x X$  の正規直交基底を  $\{e_i \mid i = 1, \dots, n\}$  とする. 一般性を失うことなく,  $x$  で  $\nabla_{e_i} e_j = 0$  としてよい. 関数  $x \mapsto \Phi(x, \theta)$  に Laplacian  $\Delta$  を作用させると,  $\Phi(x, \theta)$  の形から

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(x, \theta) &= - \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \Phi(x, \theta) \\ &= -c \{ \Delta B(x, \theta) + c \|\nabla B(x, \theta)\|^2 \} \Phi(x, \theta) \end{aligned} \quad (35)$$

一般的に, Busemann 関数は各点において  $\|\nabla B(x, \theta)\| = 1$  ([E],[S] 参照) より,

$$\Delta \Phi(x, \theta) = -c \{ \Delta B(x, \theta) + c \} \Phi(x, \theta). \quad (36)$$

Poisson 核は調和関数なので, 左辺は 0. よって右辺,  $\Delta B(x, \theta) = -c$  である.

さてベクトル  $\nabla B(x, \theta)$  は  $\theta$  中心のホロ球面  $H_x(\theta) = \{y \in X \mid B(y, \theta) = B(x, \theta)\}$  の  $x$  における内向き法線ベクトルである. さらに法線ベクトル  $\nabla B(x, \theta)$  についての第二基本形式  $\Pi$  は点  $y \in H_x(\theta)$  において

$$\begin{aligned} \Pi(v, w) &= -\text{Hess} B(\cdot, \theta)(v, w), \quad v, w \in T_y H_x(\theta) \\ &= -\langle \nabla_v (\nabla B(\cdot, \theta)), w \rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

単位ベクトル  $e_1$  をベクトル  $\nabla B(\cdot, \theta)$  ととれることおよび  $\nabla B(\cdot, \theta)$  が測地線に接することに注意して

$$\begin{aligned}\Delta B(\cdot, \theta) &= -\langle \nabla_{e_1}(\nabla B(\cdot, \theta)), e_1 \rangle - \sum_{i=2}^n \langle \nabla_{e_i}(\nabla B(\cdot, \theta)), e_i \rangle \quad (38) \\ &= -\sum_{i=2}^n \langle \nabla_{e_i}(\nabla B(\cdot, \theta)), e_i \rangle\end{aligned}$$

この右辺は  $-\text{Hess}B(\cdot, \theta)$  の  $T_y H_x(\theta)$  でのトレースに等しい. すなわちこれは平均曲率をあらわすので, 平均曲率はホロ球面上一定である. Besson, Courtois, Gallot の定理を適用できて定理の証明が終わる.

4.3 実は定理の逆命題がえられる.

**命題 4.3** ([I-Sh],[Sh-2]).  $(X, h)$  を単連結, 完備負曲率 Riemann 多様体で, 曲率条件 2.1 をみたすものとする. どのホロ球面の平均曲率も一定でしかも共通の値  $c > 0$  をとるものとする. すると Poisson 核関数は Busemann 関数を指数関数の肩にもつ:

$$\Phi(x, \theta) = \exp(-cB(x, \theta)) \quad (39)$$

証明は次のようにする. 仮定よりホロ球面の平均曲率が一定でしかも共通の値をとるので, さきほどの定理の証明中の議論の逆をたどれば  $\Delta B(x, \theta) = -c$  である. ここで新たな関数を  $\Psi(x, \theta) = \exp(-cB(x, \theta))$  とおく. 定理の証明の中の議論から  $\Psi(x, \theta)$  は  $x$  について調和関数である. また Busemann 関数の性質より  $\Psi(x, \theta)$  は Poisson 核の性質をみたす. 正規化された Poisson 核の一意性より ([Sch-Y]),  $\Psi(x, \theta)$  は正規化された Poisson 核に他ならない.

**系 4.4**  $(X, h)$  を単連結, 完備負曲率 Riemann 多様体で, 曲率条件 2.1 をみたすものとする. Poisson 核が Busemann 関数を指数関数の肩にもつことと, どのホロ球面の平均曲率も一定でしかも共通の値  $c$  をとるということとは同値である.

## 5. 残された問題と今後の課題

**5.1 問題:** 定理 3.1 または定理 3.1 プラス定理 3.12 の結論から逆に  $(X, h)$  は階数 1 の対称空間となるか?

**5.2 問題:** 定理 4.2 においてコンパクト商の仮定がとれるか? 関連して Damek-Ricci 空間なる負曲率をもつ単連結完備 Riemann 等質空間が存

在する. 等質性から曲率条件 2.1 がみたされ, 調和的であるので漸近調和でもある. ホロ球面の平均曲率が共通一定値をとるかどうかわかり, Poisson 核と Busemann 関数の関係性を調べることは興味ある問題である. なぜならば Damek-Ricci 空間はコンパクト商をもたないことが [B-C-G] において示されているので, 定理 4.2 でのコンパクト商の仮定が本質的かどうか検証できることになる.

5.3 熱核  $k(x, y; t)$  は熱方程式の基本解である:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u. \quad (40)$$

Poisson 核と同様に, 熱核写像  $\varphi_t : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ;  $\varphi_t(x) = k(x, y; t)dv$  の幾何学が考えられる. Poisson 核写像との違いは値域を  $X$  自身上の確率測度空間  $\mathcal{P}(X)$  にとれるということである. 熱核は確率論的にはまさに Brown 運動そのものである.

5.4 熱核の例. ユークリッド空間  $(X, h) = (\mathbf{R}^n, h_o)$  上, 熱核  $k(x, y; t)$  は

$$k(x, y; t) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\right\}. \quad (41)$$

[K-K], 6 章参照.

**命題 5.1.** ユークリッド空間  $(X, h) = (\mathbf{R}^n, h_o)$  に対して Fisher 情報計量の熱核写像による引き戻しは次をみたす:

$$(\varphi_t)^* g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{t^2} \{x_i x_j + 2t \delta_{ij}\} \quad (42)$$

### 参考文献

- [A-N] S. Amari, H. Nagaoka, *Methods of Information Geometry*, Translations of Math. Monographs, 191, AMS, 2000.
- [A-Sch] M.T.Anderson and R. Schoen, Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature, *Ann. Math.*, 121(1985).
- [B] M. Bourdon, Structure Conforme au Bord et Flot Géodesique d'un CAT(−1)-espace, *L'Enseignement Mathématique*, t.41 (1995).
- [B-C-G] G. Besson, G. Courtois and S. Gallot, Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative, *GAFA*, 5(1995).



- [D-Ea] E. Douady, C. Earle, Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle, *Acta Math.*, 157(1986).
- [E] P. Eberlein, *Geometry of Nonpositively Curved Manifolds*, The University of Chicago Press, 1944.
- [F] T. Friedrich, Die Fisher Information und symplektische Strukturen, *Math. Nachrichten*, 153(1991).
- [G] P.B.Gilkey, *The Index Theorem and the Heat Equation*, Publish or Perish, 1974.
- [H] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1962.
- [I-Sh] M. Itoh, Y. Shishido, Fisher Information Metrics and Poisson Kernels, submitted .
- [K-K] 北原晴夫, 河上肇, 調和積分論, 近代科学社, 1991.
- [P] イ・ゲ・ペトロフスキー, 偏微分方程式論, 東京図書, 1976.
- [S]. 酒井 隆, リーマン幾何学, 裳華房, 1993.
- [Sch-Y] R. Schoen, S.T. Yau, *Lectures on Differential Geometry*, Conference Proc. and Lecture Note in Geometry and Topology, Intern. Press, 1994.
- [Sh-1] Y. Shishido, Geometry of infinite dimensional statistical manifolds, Master thesis, 2004.
- [Sh-2] Y. Shishido, Differential Geometry of the Fisher Information Metrics and the Space of Probability Measures, Doctor Thesis, 2007.
- [Shi] 志摩裕彦 ヘッセ幾何学, 裳華房, 2001.